



PHÂN TÍCH TRUYỀN NHIỆT 3D KẾT CẤU BÊ TÔNG NON TUỔI BẰNG PHẦN TỬ TỨ DIỆN NỘI SUY KÉP

3D heat transfer analysis of early age concrete by a new enhanced gradient finite element

Nguyễn Đình Dư¹, Nguyễn Bá Ngọc Thảo¹, Bùi Quốc Tính²

¹dingdu85@gmail.com

¹Khoa Kỹ Thuật Công Trình Trường Đại học Lạc Hồng, Đồng Nai, Việt Nam

²Department of Mechanical and Environmental Informatics, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1-W8-22, Ookayama, Meguro-ku, Tokyo, Japan, Việt Nam

Điền tòa soạn: 08/06/2017; Chấp nhận đăng: 14/06/2017

Tóm tắt. Vết nứt hoặc những khuyết tật thường xuất hiện trong kết cấu giòn như bê tông. Những khiếm khuyết đó có thể do nhiều nguyên nhân khác nhau như tải cơ học, sự tác động từ môi trường. Ngoài ra, nhiều vết nứt trong bê tông có thể bắt nguồn từ sự thay đổi thể tích nội tại hoặc phản ứng hóa học có hại làm thay đổi độ ẩm, nhiệt độ bê tông. Trong nghiên cứu này, một phần tử hữu hạn nội suy kép (CTH4) dựa trên các thủ tục nội suy liên tiếp (CIP) với sự liên tục các Gradient nhiệt tại các nút cũng như trên cạnh phần tử cho bài toán truyền nhiệt 3D. Kết quả thu được là chính xác cho trường nhiệt độ, từ đó hạn chế được những phá hoại do nhiệt.

Từ khóa: Bê tông non tuổi; Phần tử TH4; Nội suy kép; Truyền nhiệt

Abstract. Defects or cracks are commonly observed in quasi-brittle materials like concrete structures. It is well-known to understand that cracks may be caused by different reasons due to, for instance, mechanical loading, some deleterious reactions or environmental loadings. Also, many of cracks in concrete may be traced to intrinsic volumetric changes or the deleterious chemical reactions, resulting in response to moisture, chemical, and thermal effects in concrete. In this work, we develop a new finite element based on consecutive-interpolation procedure (CTH4) for heat transfer analysis of early age concrete in three-dimension. Temperature distribution and its gradient over time in early age concrete will be analyzed through some representative numerical examples. The present numerical results are also validated against the conventional finite element (TH4).

Keywords: Early Age Concrete; Tetrahedral element; Consecutive-interpolation element; Heat transfer

1. GIỚI THIỆU

Kết cấu chỉ làm việc hiệu quả và đạt mong muốn của nhà thiết kế khi ở một nhiệt độ nhất định ban đầu hoặc có nhiệt độ có thể thay đổi nhưng trong phạm vi hẹp. Tuy nhiên, trong quá trình thủy phân của xi măng, một lượng nhiệt lớn được sinh ra dẫn đến sự chênh lệch nhiệt độ rất lớn giữa bề mặt kết cấu và bên trong kết cấu. Đặc biệt là các kết cấu bê tông khối lớn. Sự chênh lệch nhiệt độ này là nguyên nhân chủ yếu gây ra các vết nứt cho kết cấu, là mầm mống gây phá hoại và giảm tuổi thọ công trình. Do đó, việc tính toán mô phỏng trường nhiệt độ cũng như trường biến dạng, ứng suất là cần thiết.

Với hình thể và điều kiện biên phức tạp của bài toán thì việc tìm lời giải chính xác bằng phương pháp giải tích là không thể. Do đó, phương pháp số ra đời như một đáp ứng cần thiết, đặc biệt là phương pháp PTHH. Tuy nhiên, PTHH vẫn còn tồn tại một số vấn đề cần khắc phục như sự bất liên tục về Gradient tại nút và cạnh giữa các phần tử. Hiện nay, đã có nhiều phương pháp dựa trên nền tảng PTHH nhưng có sự cải tiến như XFEM, SFEM...v.v. Trong nghiên cứu này, một đề xuất có tính kế thừa từ phương pháp PTHH nhưng được cải tiến hàm nội suy sao cho các Gradient nhiệt có tính liên tục tại nút và trên cạnh biên giữa các phần tử nhằm mô phỏng chính xác trường biến dạng nhiệt cũng như ứng suất do nhiệt. Sự cải tiến này được gọi là thủ tục nội suy kép (consecutive-interpolation), được giới thiệu đầu tiên bởi Zheng và các cộng sự (2011) cho phần tam giác (CT3)[1]. Tiếp đến là một loạt các công bố cho phần tử tứ giác (CQ4) được phát triển bởi Bui Quoc Tinh và các cộng sự, dễ dàng tìm thấy trong [1][2][3]. Tiếp theo sự thành công đó, trong phạm vi bài viết này, một nghiên cứu mới cho bài toán truyền

nhiệt 3D được áp dụng cho móng bê tông khối lớn. Bài toán được mô phỏng bằng phần tử CTH4 và được lập trình trên phần mềm Matlab. Kết quả thu được từ nghiên cứu được so sánh với tài liệu tham khảo [5] nhằm kiểm chứng hiệu suất của phương pháp.

2. XÂY DỰNG PHẦN TỬ CTH4

2.1 Tổng quan nội suy kép

Trong bài toán 3D, xét một miền $\Omega \in R^3$ và chịu ràng buộc bởi biên Γ . Hàm số $u(\mathbf{x})$ được xấp xỉ gần đúng theo thủ tục nội suy kép (CIP) như [1, 2, 3, 4]

$$u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n (\phi_I u^{[I]} + \phi_{I,x} \bar{u}_{,x}^{[I]} + \phi_{I,y} \bar{u}_{,y}^{[I]} + \phi_{I,z} \bar{u}_{,z}^{[I]}) \quad (1)$$

Trong đó n là chỉ số của nút phần tử và $u^{[I]}$ là giá trị của hàm $u(\mathbf{x})$ tại nút I được nội suy theo phương pháp PTHH truyền thống.

$$u^{[I]} = u(x_I) = \sum_{I=1}^n N_I \hat{u}_I = \mathbf{N} \hat{\mathbf{u}} \quad (2)$$

Trị số, $\bar{u}_{,x}^{[I]}$, $\bar{u}_{,y}^{[I]}$ và $\bar{u}_{,z}^{[I]}$ là giá trị đạo hàm trung bình của hàm $u(\mathbf{x})$ tại nút I . Giá trị đạo hàm đầu tiên $\bar{u}_{,x}^{[e]}(x_I)$ của nút I chính là đạo hàm của hàm $u(\mathbf{x})$ tại nút I thuộc phần tử e và được viết bởi PTHH chuẩn như bên dưới:

$$\bar{u}_{,x}^{[e]}(x_I) = \sum_{I=1}^{ne} N_{I,x} \hat{u}_I = \mathbf{N}_{,x} \hat{\mathbf{u}} \quad (3)$$

với ne là nút bắt đầu thuộc phần tử e . Sau khi lần lượt tính đạo hàm $\bar{u}_{,x}^{[e]}(x_I)$ tại nút I cho tất cả các phần tử $e \in S_I$ có

chứa nút I , giá trị đạo hàm trung bình $\bar{u}_{,x}^{[I]}$ có thể được tính bằng trung bình hàm trọng số như bên dưới.

$$\bar{u}_{,x}^{[I]} = \sum_{e=S_e}^{ne} (\omega_e N_{,x}^{[I]e} \hat{u}_I) = \bar{N}_{,x} \hat{u} \quad (4)$$

Trong phương trình (4), ω_e là hàm trọng số được định nghĩa là tỷ số diện tích của phần tử e với tổng diện tích miền S_I . Giá trị $\bar{u}_{,y}^{[I]}$, $\bar{u}_{,z}^{[I]}$ được tính tương tự như $\bar{u}_{,x}^{[I]}$.

Trong phương trình (1), các hàm ϕ_I , $\phi_{I,x}$, $\phi_{I,y}$, $\phi_{I,z}$ được gọi là hàm hỗ trợ và phụ thuộc vào hình dáng phần tử nhưng chúng phải thỏa mãn điều kiện bên dưới [1, 2]:

$$\begin{aligned} \phi_I(\mathbf{x}_j) &= \delta_{IJ}, \phi_{I,x}(\mathbf{x}_j) = 0, \phi_{I,y}(\mathbf{x}_j) = 0 \\ \phi_{I,x}(\mathbf{x}_j) &= 0, \phi_{I,x,x}(\mathbf{x}_j) = \delta_{IJ}, \phi_{I,x,y}(\mathbf{x}_j) = 0 \\ \phi_{I,y}(\mathbf{x}_j) &= 0, \phi_{I,y,x}(\mathbf{x}_j) = 0, \phi_{I,y,y}(\mathbf{x}_j) = \delta_{IJ} \end{aligned} \quad (5)$$

Những điều kiện ở phương trình (5) được diễn giải chi tiết trong [2]. Phương trình (1) có thể được viết lại như sau

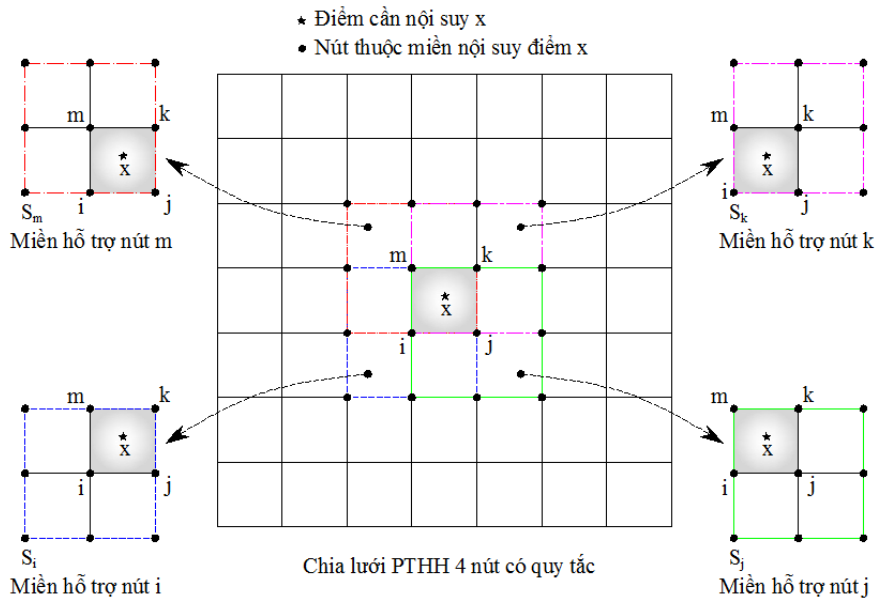
$$u(\mathbf{x}) \approx \tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n R_I \hat{u}_I \quad (6)$$

Trong CFEM, hàm dạng R_I có liên quan đến nút I được viết như sau

$$R_I = \phi_I N_I + \phi_{I,x} N_{,x}^{[I]} + \phi_{I,y} N_{,y}^{[I]} + \phi_{I,z} N_{,z}^{[I]} \quad (7)$$

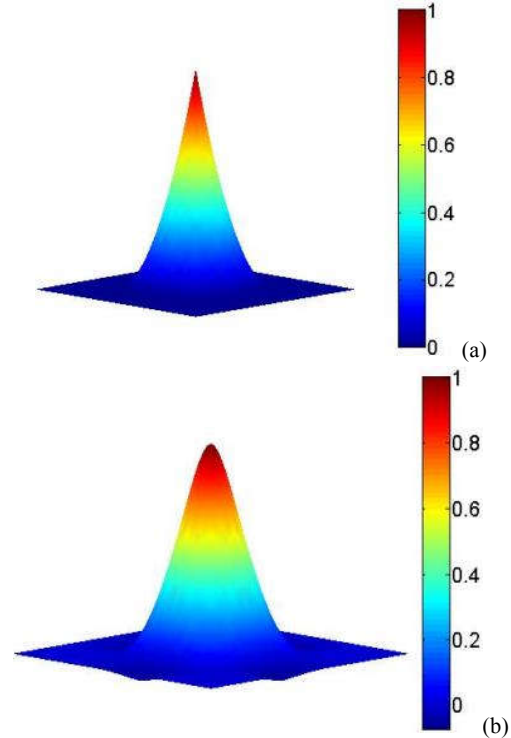
Để đơn giản hơn khi nghiên cứu thủ tục nội suy kép (CIP) trong 3D, một ví dụ minh họa thủ tục CIP được áp đặt vào miền bài toán 2D như hình 1[1]. Một điểm cần nội suy $\mathbf{x}(x,y)$ trong phần tử tứ giác như hình 1, theo phương pháp PTHH truyền thống thì sẽ được nội suy từ 4 nút i, j, k, m ; Tuy nhiên, khi áp dụng CFEM thông qua thủ tục CIP thì miền nội suy sẽ rộng hơn và được minh họa trong hình 1. Hàm dạng của phần tử CQ4 và Q4 được minh họa trong hình 2, để dàng nhận thấy CQ4 trơn và liên tục tại nút cũng như trên cạnh phần tử.

2.2 Phần tử CTH4

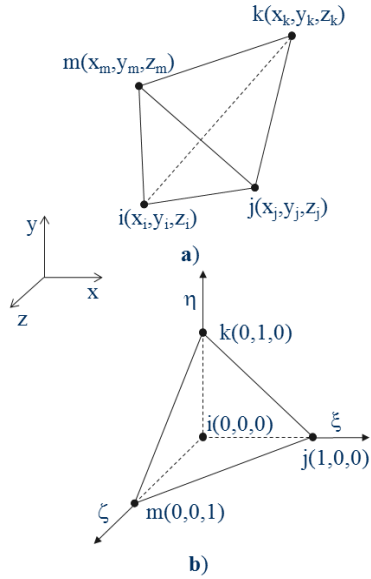


Hình 1. Hình minh họa CQ4 trong 2D

Xây dựng mới phần tử 3D tứ diện nội suy kép (CTH4) được trình bày trong mục này. Từ phần tử tứ diện trong PTHH truyền thống, chúng tôi áp dụng thủ tục CIP để xây dựng lại hàm dạng có bậc cao hơn nhưng không làm tăng bậc tự do của bài toán. Mô hình phần tử tứ diện trong không gian vật lý và không gian tự nhiên được thể hiện như Hình 3. Miền hỗ trợ của phần tử CTH4 được minh họa như trong Hình 4.



Hình 2. Hàm dạng của Q4 (a), CQ4 (b) trong 2D



Hình 3. Phần tử TH4 trong không gian vật lý và tự nhiên

Chúng ta định nghĩa bốn nút của phần tử tứ diện là i, j, k, m và hàm dạng của 4 nút được viết như sau:

$$L_i = 1 - \xi - \eta - \zeta \quad (8)$$

$$L_j = \xi \quad (9)$$

$$L_k = \eta \quad (10)$$

$$L_m = \zeta \quad (11)$$

các đạo hàm từng phần được tính như sau:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (12)$$

trong đó \mathbf{J} là ma trận Jacobian được tính toán như sau:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_i}{\partial \xi} & \frac{\partial L_j}{\partial \xi} & \frac{\partial L_k}{\partial \xi} & \frac{\partial L_m}{\partial \xi} \\ \frac{\partial L_i}{\partial \eta} & \frac{\partial L_j}{\partial \eta} & \frac{\partial L_k}{\partial \eta} & \frac{\partial L_m}{\partial \eta} \\ \frac{\partial L_i}{\partial \zeta} & \frac{\partial L_j}{\partial \zeta} & \frac{\partial L_k}{\partial \zeta} & \frac{\partial L_m}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_m & y_m & z_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

Các hàm hỗ trợ như “(5)” được viết bởi

$$\phi_i = L_i + L_i^2(L_j + L_k + L_m) - L_i(L_j^2 + L_k^2 + L_m^2) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ix} = & -(x_i - x_j)(L_i^2 L_j + p L_i L_j L_k + p L_i L_j L_m) \\ & -(x_i - x_k)(L_i^2 L_k + p L_i L_k L_m + p L_i L_k L_j) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \phi_{iy} = & -(y_i - y_j)(L_i^2 L_j + p L_i L_j L_k + p L_i L_j L_m) \\ & -(y_i - y_k)(L_i^2 L_k + p L_i L_k L_m + p L_i L_k L_j) \\ & -(y_i - y_m)(L_i^2 L_m + p L_i L_m L_j + p L_i L_m L_k) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \phi_{iz} = & -(z_i - z_j)(L_i^2 L_j + p L_i L_j L_k + p L_i L_j L_m) \\ & -(z_i - z_k)(L_i^2 L_k + p L_i L_k L_m + p L_i L_k L_j) \\ & -(z_i - z_m)(L_i^2 L_m + p L_i L_m L_j + p L_i L_m L_k) \end{aligned} \quad (17)$$

với $p = 0,5$. Các hàm số $\phi_j, \phi_x, \phi_y, \phi_z; \phi_k, \phi_{kx}, \phi_{ky}, \phi_{kz}; \phi_m, \phi_{mx}, \phi_{my}, \phi_{mz}$ được viết tương tự bằng cách xoay vòng các chỉ số i, j, k, m .

3. PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT VÀ MÔ HÌNH THỰC TẾ

3.1 Phương trình chủ đạo quá trình truyền nhiệt

Phương trình vi phân chủ đạo của quá trình truyền nhiệt 3D ở dạng tổng quát như [5]

$$\nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla T) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (18)$$

với các điều kiện biên được cho như bên dưới

$$T = T_0, \text{ trên } \Gamma_1 : \text{Biên nhiệt độ đã biết} \quad (19)$$

$$(\mathbf{k} \nabla T) \cdot \mathbf{n} = q_0, \text{ trên } \Gamma_2 : \text{Biên truyền nhiệt} \quad (20)$$

$$(\mathbf{k} \nabla T) \cdot \mathbf{n} = h(T_a - T), \text{ trên } \Gamma_3 : \text{Biên đối lưu} \quad (21)$$

Trong phương trình (18), $\mathbf{k} = \text{diag}(k_{xx}, k_{yy}, k_{zz})$ là ma trận hệ số dẫn nhiệt, T là trường nhiệt độ, Q là dòng nhiệt, ρ là khối lượng riêng, c là nhiệt dung riêng. Trong các phương trình (19-21), T_0 là nhiệt độ đã biết; q_0 là dòng nhiệt đã biết; T_a là nhiệt độ môi trường; $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$ là cosin chỉ phương.

Các dạng yếu của vấn đề truyền nhiệt thu được bằng cách nhân hai vế phương trình (8) với một hàm thử δT và tích phân trên toàn miền

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla T) \delta T d\Omega + \int_{\Omega} Q \delta T d\Omega = \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \delta T d\Omega \quad (22)$$

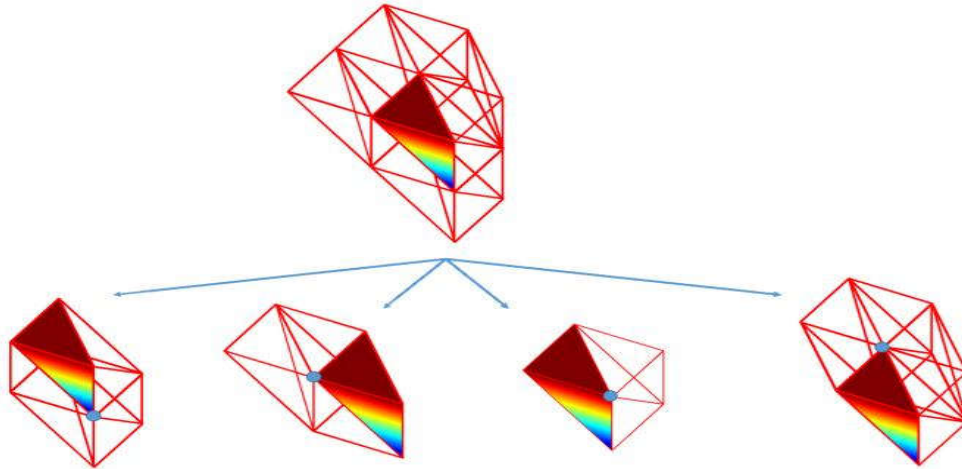
Áp dụng lý thuyết Gaussian, áp đặt các điều kiện biên và thực hiện các phép biến đổi ta có:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \delta T d\Omega + \int_{\Omega} (\delta \nabla T) \mathbf{k} \nabla T d\Omega - \int_{\Omega} Q \delta T d\Omega \\ - \int_{\Gamma} q_0 \delta T d\Gamma - \int_{\Gamma} h(T_a - T) \delta T d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Sau khi trường nhiệt độ được xác định, năng lượng nhiệt trên toàn miền được tính toán thông qua công thức sau:

$$\Psi = \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B} d\Omega \right) \hat{\mathbf{T}} \quad (24)$$

trong đó $\hat{\mathbf{T}}$ là nhiệt độ tại nút và \mathbf{B} là ma trận đạo hàm của hàm dạng



Hình 4. Miền hỗ trợ của phần tử CTH4

$$B = \begin{Bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial x} & \frac{\partial R_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_n}{\partial x} \\ \frac{\partial R_1}{\partial y} & \frac{\partial R_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial R_n}{\partial y} \\ \frac{\partial R_1}{\partial z} & \frac{\partial R_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial R_n}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Trong phương trình (25), R_l là hàm dạng phần tử CTH4 được thể hiện trong “(7)”.

3.2 Mô hình thực tế

Trong quá trình ninh kết bê tông, một lượng nhiệt rất lớn tỏa ra do quá trình thủy phân của xi măng. Đặc tính của bê tông là dẫn nhiệt kém và diện tích trao đổi nhiệt với môi trường là nhỏ cùng với kết cấu là bê tông khối lớn nên lượng nhiệt này tích tụ bên trong kết cấu bê tông và tạo nên sự chênh lệch giữa tâm kết cấu và bề mặt bên ngoài. Các thông số bài toán như nhiệt sinh ra do quá trình thủy phân, nhiệt độ môi trường, nhiệt tại các biên, nhiệt độ bê tông khi đổ (nhiệt độ ban đầu) dễ dàng tìm thấy trong [6].

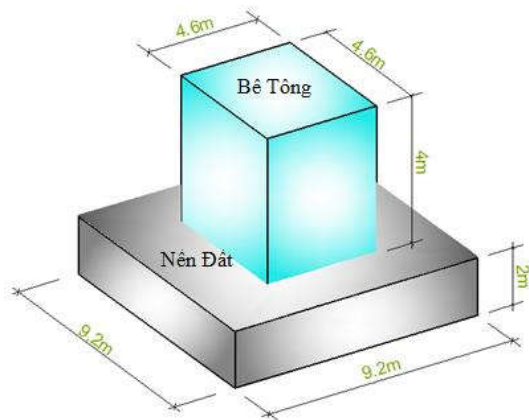
Bảng 1. Các thông số vật liệu trong mô hình

	Bê Tông Đài Móng B40	Nền Đất
Tỷ nhiệt C, (kcal/kg ⁰ C)	0.27	0.2
Khối lượng thể tích, (kG/m ³)	2400	1800
Hệ số dẫn nhiệt, (kcal/m.h. ⁰ C)	2.5	1.7
Hệ số trao đổi nhiệt, (kcal/m ² .h. ⁰ C)	12	12
Nhiệt độ bê tông khi đổ (⁰ C)	30	
Hằng số hàm tăng nhiệt độ đoạn nhiệt (⁰ C)	K= 59.6 ⁰ C, α = 1.113	
Nhiệt độ môi trường (⁰ C)	28.7	

4. KẾT QUẢ SỐ

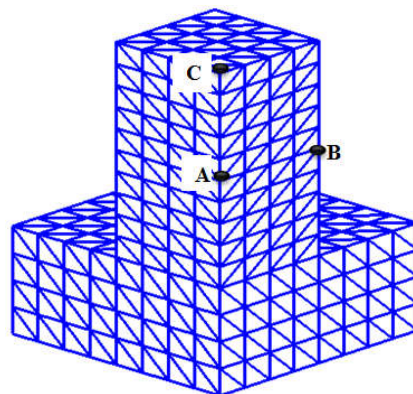
Một khối móng bê tông có kích thước 4600x4600x4000 đặt trên nền đất như Hình 3 là mô hình được phân tích trong nghiên cứu này. Do tính đối xứng về vật liệu và các điều kiện biên cũng như để giảm thời gian phân tích nên ¼ mô

hình được phân tích. Khối hình học bê tông và đất được chia lưới có quy tắc như Hình 4. Tổng thời gian phân tích của bài toán là 700h, đây là khoảng thời gian mà nhiệt độ trong khối bê tông giảm gần ngang với nhiệt độ môi trường. Bước thời gian trong mỗi lần phân tích càng nhỏ thì sai số bài toán càng nhỏ đồng nghĩa với vấn đề sẽ tồn tại nguyên cũng như thời gian máy tính, do đó trong nghiên cứu này chọn bước thời gian phân tích là 1,75h. Các số liệu của bài toán được cho như trong Bảng 1.

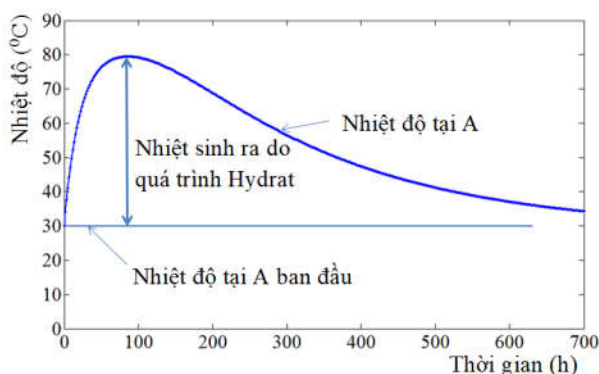


5. Mô hình thực tế và kích thước hình học

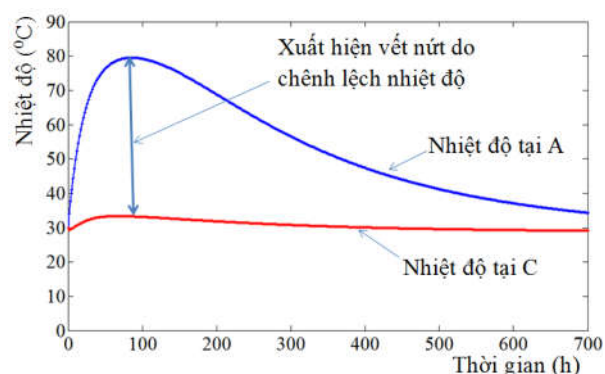
Hình



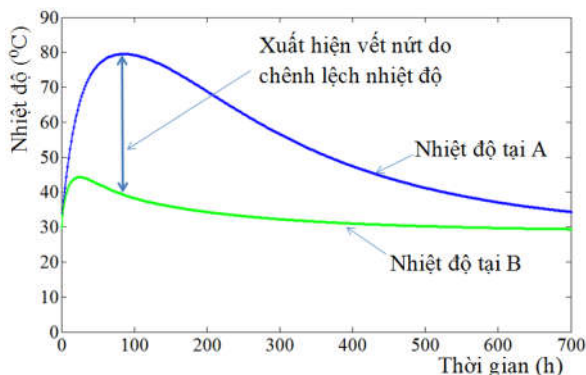
Hình 6. Chia lưới và vị trí điểm cần khảo sát



Hình 7. Biểu đồ minh họa nhiệt độ tại A theo thời gian

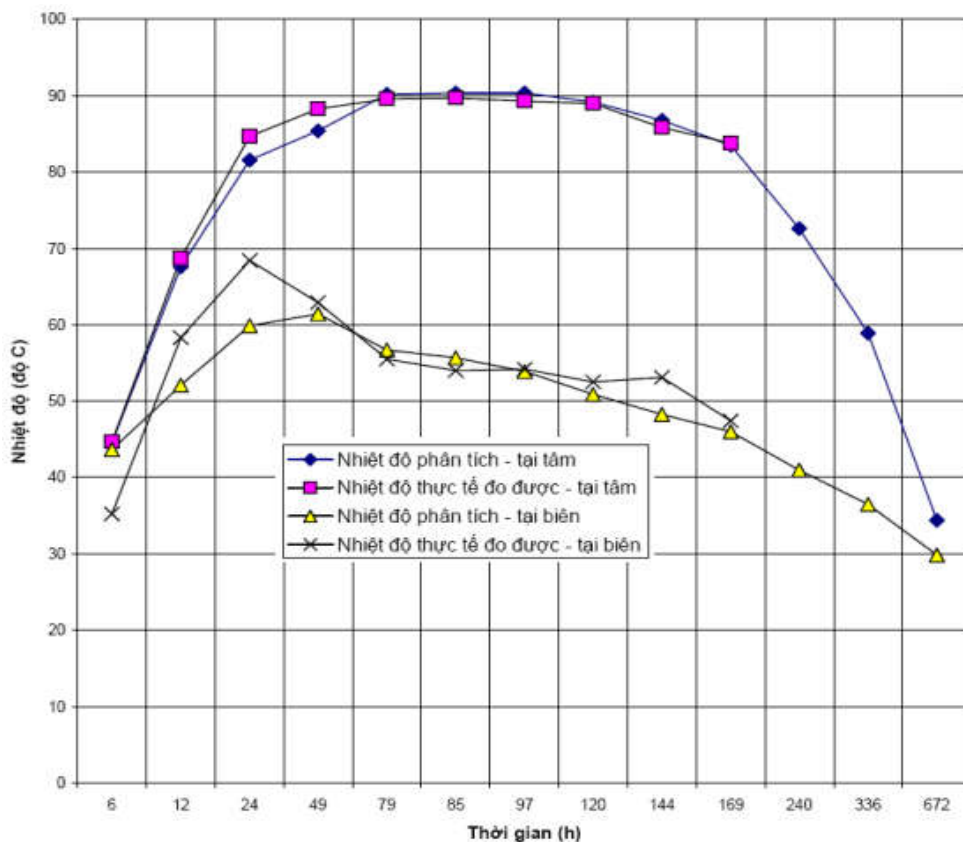


Hình 9. Biểu đồ minh họa sự chênh lệch nhiệt độ tại A và C theo thời gian



Hình 8. Biểu đồ minh họa sự chênh lệch nhiệt độ tại A và B theo thời gian

Nhằm thấy rõ được sự chênh lệch nhiệt độ theo thời gian giữa vùng biên và tâm của khối móng nền nhiệt độ tại ba điểm A, B, C được khảo sát như hình 6. Hình 7 minh họa nhiệt độ tại điểm A theo thời gian với bước thời gian phân tích là 1,75h. Trong khoảng từ lúc bắt đầu đổ đến 98h thì nhiệt độ tăng một cách nhanh chóng và đạt cực đại sau thời gian khoảng 98h. Đây là thời điểm tương ứng với quá trình thủy hóa đang diễn ra rất mạnh, lượng nhiệt sinh ra lớn hơn rất nhiều so với lượng nhiệt tỏa ra môi trường. Sau đó nhiệt độ bắt đầu giảm dần theo thời gian do phản ứng thủy phân đi đến giai đoạn kết thúc và sẽ tiến sát đến nhiệt độ môi trường sau khoảng thời gian 700h.



Hình 10. Biểu đồ nhiệt độ tại tâm và biên khối móng, giữa phân tích số và thí nghiệm thực tế, tham khảo [5]

Hình 8 và Hình 9 minh họa sự khác biệt giữa nhiệt độ tại tâm khối móng và bờ mặt khối móng. Một trong những

nguyên nhân gây ra nứt là do sự chênh lệch nhiệt độ giữa bên trong và bên ngoài khối móng. Trong khoảng 98h đầu,

hiệt độ chênh lệch rất lớn, giữa điểm A và điểm B là 38°C còn giữa điểm A và điểm C là 42°C. Có sự khác biệt này là do khoảng cách giữa hai điểm A và C là lớn hơn giữa A và B. Nhiệt độ tại bờ mặt có sự tăng nhẹ và đạt cực đại trở pha so với nhiệt độ tại tâm khối móng do khoảng cách về không gian tiếp xúc với môi trường.

Trong Hình 10, được tham khảo tại [5], nhiệt độ tại tâm khối móng và mặt biên khối móng được thể hiện bằng phân tích số (Phần mềm Midas) và mô hình thí nghiệm thực tế. Có thể nhận thấy quy luật thay đổi nhiệt độ giữa [5] và nghiên cứu này là giống nhau. Tuy nhiên có sự khác nhau tương đối về nhiệt độ cực đại là do bước thời gian phân tích cũng như quan niệm về các điều kiện biên khi phân tích.

5. KẾT LUẬN

Kết quả phân tích trường nhiệt độ bằng phương pháp nghiên cứu mô tả đúng được qui luật nhiệt độ trong khối bê tông do quá trình thủy phân. Từ đó đề xuất được các biện pháp thi công hợp lý để hạn chế các vết nứt trong bê tông nhằm tránh phá hoại diễn ra trong lòng kết cấu. Đặc biệt là bê tông khối lớn, thường là kết cấu của những công trình quan trọng như móng nhà cao tầng, mỏ trụ cầu, đường băng sân bay...v.v. Tuy nhiên, để rõ ràng hơn thì cần phải phân tích thêm trường ứng suất theo thời gian để xác định được chính xác thời điểm xảy ra vết nứt và đó là hướng cho những

nghiên cứu tiếp theo và phân tích những kết cấu phức tạp hơn.

6. TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Bui QT, Vo QD, Zhang Ch, Nguyen DD, “A consecutive-interpolation quadrilateral element (CQ4): Formulation and applications”, Finite elements in analysis and design, 84, 14-31, 2014.
- [2] Zuoyi Kang, Tinh Quoc Bui, Du Dinh Nguyen, Takahiro Saitoh, Sohichi Hirose, “An extended consecutive-interpolation quadrilateral element (XCQ4) applied to linear elastic fracture mechanics”, Acta Mech, Springer-Verlag Wien, Volume 226, issue 12, pp 3991–4015, 2015.
- [3] Tinh Quoc Bui, Du Dinh Nguyen, Xiaodong Zhang, Sohichi Hirose, Romesh C. Batra, “Analysis of 2-dimensional transient problems for linear elastic and piezoelectric structures using the consecutive-interpolation quadrilateral element (CQ4)”, European Journal of Mechanics A/Solids, 58, pp 1-19, 2016.
- [4] Bùi Đức Vinh, Nguyễn Văn Chánh, Chu Quốc Thắng “Phân tích phản nở nhiệt hydrat và ứng suất trong cấu trúc bê tông để kiểm soát sự gãy nứt của công trình bê tông cốt thép”, Tuyển tập công trình khoa học - Hội nghị khoa học sự cố và hư hỏng công trình xây dựng, 2012.
- [5] Hồ Ngọc Khoa, Vũ Chí Công, “Phân tích trường nhiệt độ và ứng suất nhiệt trong bê tông khối lớn bằng phương pháp phần tử hữu hạn”, Tạp chí KHCN Xây Dựng, Số 14/12, 2012.

TIỂU SỬ TÁC GIẢ



Nguyễn Đình Dư

Năm sinh 1985, Tuy Phước, Bình Định. Tốt nghiệp Đại học và Thạc sĩ tại Trường Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh năm 2009 và 2013. Giảng viên cơ hữu khoa Kỹ thuật Công trình Trường Đại học Lạc Hồng. Lĩnh vực nghiên cứu: Cơ học vật rắn biến dạng, phương pháp số, động lực học kết cấu.



Nguyễn Bá Ngọc Thảo

Năm sinh 1986, Phan Thiết, Bình Thuận. Tốt nghiệp Đại học và Thạc sĩ tại trường đại học Lạc Hồng, Đồng Nai năm 2009 và 2013. Giảng viên cơ hữu khoa Kỹ thuật Công trình Trường Đại học Lạc Hồng. Lĩnh vực nghiên cứu: Bê tông cốt thép cường độ cao.